

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Други разред, Б категорија

1. (а) Одредити остатак при дељењу броја $(5^{41} + 2)(3^{105} - 1) + 357 \cdot (5^{70} + 1)$ са 4.
(б) Испитати да ли је број $2^{60} + 3^{70}$ дељив са 13.
2. Кружнице k_1 и k_2 секу се у тачкама A и B . Права PQ , таква да је $P \in k_1$ и $Q \in k_2$, садржи тачку A . Доказати да однос $\frac{BP}{BQ}$ не зависи од праве PQ .
3. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{aligned}x_1 + \sqrt{x_2} &= 1, \\x_2 + \sqrt{x_3} &= 1, \\x_3 + \sqrt{x_1} &= 1.\end{aligned}$$

4. Око круга полупречника r описан је четвороугао $ABCD$. Тачка додира дели страницу AB на одсечке дужина a и b , а страницу AD на одсечке дужина a и c . Доказати да важи

$$r > \sqrt{\frac{abc}{a+b+c}}.$$

5. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{x}} = 1.$$

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.