

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ  
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 28.02.2009.

Други разред, А категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{x}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{x}} = 1.$$

2. Нека су  $\alpha, \beta, \gamma \in (0, \pi)$  и  $n \in \mathbb{N}$ . Доказати да постоји  $\varphi \in \mathbb{R}$  тако да је

$$\sin \varphi = \frac{\sin \beta \sin \gamma}{n - \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma}.$$

Да ли тврђење важи ако је  $n \in \mathbb{Z}$ ?

3. Нека је  $P$  површина троугла, а  $R$  полупречник његове описане кружнице. Доказати да важи неједнакост

$$P \leq \frac{3\sqrt{3}R^2}{4}.$$

Када се у претходној неједнакости достиже једнакост?

4. На колико начина се  $b$  белих,  $c$  црвених и  $p$  плавих куглица може поређати у низ, тако да се никоје 2 плаве куглице не налазе једна до друге (куглице исте боје се не разликују)?
5. Одредити све природне бројеве  $n$  за које је  $2^n + 3^n + 4^n$  потпун квадрат.

Време за рад 180 минута.  
Сваки задатак вреди 20 поена.