

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.

Четврти разред, А категорија

1. Низ природних бројева $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ дефинисан је са $a_1 = 3$ и $a_{n+1} = 3^{a_n}$ за $n \geq 1$.

Одредити последње две цифре броја a_{2008} .

2. Нека је $ABCDEF$ шестоугао уписан у кружницу полупречника 1, тако да су странице AB , CD , EF дужине 1. Доказати да средишта страница BC , DE и AF формирају једнакостранични троугао.

3. Нека су α , β и γ све нуле полинома $x^3 - 9x + 9$. Доказати да је

$$\alpha^2 + \alpha - 6 \in \{\beta, \gamma\}.$$

4. У скупу реалних бројева решити

$$2008^{\log_{2006}(x-1)} - 2006^{\log_{2008}(x+1)} = 2.$$

5. 100 сијалица је поређано у таблу 10×10 , при чему свака може да буде упаљена или угашена. У једном кораку је дозвољено:

1° променити стања свих сијалица у једној врсти;

2° променити стања свих сијалица у једној колони;

3° упалити произвољну сијалицу која је окружена са 4 упаљене (сијалице које окружују сијалицу S су оне које се налазе на пољима која имају заједничку страницу са пољем на коме се налази S).

У почетку су све сијалице угашене. Да ли је могуће низом оваквих корака постићи да све сијалице осим једне у углу и једне њој суседне буду угашене?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.