

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.

Трећи разред, Б категорија

1. Доказати да се кружнице

$$x^2 + y^2 - 2x - 12y + 12 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + 2x - 9y + 15 = 0$$

додирују изнутра и одредити једначину њихове заједничке тангенте.

2. Нека је $SABC$ тространа пирамида, чији су сви ивични углови код врха S прави и нека је O подножје висине из тачке S на раван ABC .

(а) Доказати да је O ортоцентар троугла ABC .

(б) Ако су површине троуглова ABC и OBC једнаке P_1 и P_2 , редом, одредити површину троугла SBC .

3. У скупу реалних бројева решити

$$\log_{\frac{1}{3}} \left(4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} \right) \geq \operatorname{sgn} \left(\log_x 5^{\sqrt{1-x}} \right)$$

$$\left(\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{за } x > 0 \\ 0, & \text{за } x = 0 \\ -1, & \text{за } x < 0 \end{cases} \right).$$

4. Да ли се у равни може конструисати

(а) 2006; (б) 2007; (в) 2008

подударних кружница, тако да свака од њих додирује тачно 3 друге кружнице и никоје две кружнице се не секу?

5. Положај велике и мале казаљке на сату назива се *двоструко могућим* ако ће заменом места велике и мале казаљке оне опет коректно показивати неко време. Колико има двоструко могућих положаја казаљки?

Време за рад 240 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.