

**ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**  
**УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.**

**Други разред, А категорија**

1. У скупу целих бројева решити  $n(n+1)(n+2) = m^2$ .
2. Нека је  $n > 1$  природан број, а  $a_1, a_2, \dots, a_n$  цели бројеви, тако да важи

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 + n^3 \leq (2n-1)(a_1 + a_2 + \dots + a_n) + n^2.$$

Доказати да су сви  $a_i$  ненегативни и да број  $a_1 + a_2 + \dots + a_n + n + 1$  није потпун квадрат.

3. У  $\triangle ABC$  важи  $\sphericalangle CAB = 2 \cdot \sphericalangle BSA$ . Нека је  $N$  центар споља приписане кружнице  $\triangle ABC$  који додирује страницу  $BC$ , а тачка  $M$  средиште странице  $AC$ . Ако је пресек дужи  $BC$  и  $NM$  тачка  $P$ , доказати да је  $AB = BP$ .
4. На страницама правилног петоугла  $ABCDE$  уочено је  $n$  различитих тачака (међу уоченим тачкама могу бити и тачке  $A, B, C, D$  и  $E$ ). Испоставило се да постоји тачно 2008 троуглова чија су сва темена неке од тих тачака (троугао је одређен са три неколинеарне тачке). Колики је најмањи могући број уочених тачака?
5. У болницу је доведено 10 оболелих особа. Међу 1 000 флаша у магацину, само у једној се налази лек. Уколико неко од тих особа попије макар једну кап из флаше у којој се налази лек, након 24 сата лекар ће приметити симптоме оздрављења. Лекар има задатак да у року од 24 сата открије флашу у којој се налази лек, да би се припремио за могућу епидемију. Доказати да лекар може да обави свој задатак.

Време за рад 240 минута.  
Сваки задатак вреди 20 поена.