

**ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ**  
**УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 29.03.2008.**

**Први разред, А категорија**

1. Одредити на колико начина се могу изабрати природни бројеви  $a$ ,  $b$  и  $c$  тако да важи:
  - 1°  $a < b < c < 52$ ;
  - 2°  $a$  дели  $c$ ;
  - 3°  $b$  дели  $c$ ;
  - 4°  $a$  и  $b$  нису дељиви квадратом природног броја већег од 1;
  - 5°  $c$  јесте дељив квадратом природног броја већег од 1.
  
2. У троуглу  $ABC$  је  $\sphericalangle ABC = 45^\circ$  и  $\sphericalangle CAB = 15^\circ$ . Нека је  $M$  тачка на полуправој  $BC$  таква да је  $\overrightarrow{BM} = 3 \cdot \overrightarrow{BC}$ . Одредити углове троугла  $ABM$ .
  
3. Одредити остатак при дељењу полинома  $x^{2008} - x^{2007} - 3x + 4$  полиномом  $(x - 1)^3$ .
  
4. Око троугла  $ABC$  описати једнакостраничан троугао  $PQR$  највеће могуће дужине странице ( $\triangle PQR$  је описан око  $\triangle ABC$  ако је  $A \in QR$ ,  $B \in RP$ ,  $C \in PQ$ ).
  
5. Доказати да постоји природан број  $n$  такав да је број  $2p^n + 3$  сложен за сваки прост број  $p$ .

Време за рад 240 минута.  
Сваки задатак вреди 20 поена.