ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.02.2008.

Четврти разред, А категорија

1. Нека су $a, b, c \in \mathbb{R}$. Доказати да једначина

$$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$$

има бар једно решење у скупу реалних бројева.

2. Одредити све $m \in \mathbb{R}$, тако да корени једначине

$$x^3-12x^2+mx-60=0$$

представљају дужине страница правоуглог троугла.

3. Нека су A и B тачке неке кружнице, а P и Q тачке, такве да су праве AP и BQ тангенте на ту кружницу, $AP = BQ$ и права PQ није паралелна са правом AB. Доказати да права AB полови дуж PQ.

4. Да ли постоји функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, која није идентички једнака некој функција

$$g_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad g_k(n) = n^k, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

таква да је $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ за све $m, n \in \mathbb{N}$ и да је $f(2008)$ потпун квадрат?

5. Колико има низова нула и јединица дужине 10, таквих да се међу свака три узастопна члана низа налази највише једна јединица?

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.