

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
УЧЕНИКА СРЕДЊИХ ШКОЛА, 23.02.2008.

Други разред, А категорија

1. Нека је $a \in \mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити

$$x + a^3 = \sqrt[3]{a - x}.$$

2. Око једнакостраничног $\triangle ABC$ је описана кружница. Нека је M тачка која припада луку BC те кружнице, којем не припада теме A . Доказати да је $MA = MB + MC$.

3. Нека су $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\beta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ такви да важи

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}.$$

Одредити могуће вредности $\alpha + 2\beta$.

4. Нека су реални бројеви a и b такви да им је разлика једнака фиксном броју α , а производ једнак фиксном позитивном броју β . Одредити све полиноме облика $x^2 + px + q$ такве да, какви год били бројеви a и b са горе наведеном особином, $\max\{a, b\}$ је корен тог полинома, где су p и q изражени у зависности од α и β .
5. У приземљу зграде од 5 спратова, у лифт су ушли Аца, Душан, Лука, Наташа и Цеца. На колико начина се лифт може испразнити тако да ни у једном тренутку неки мушкарац и нека жена не буду сами у лифту? (Свако од њих излази на неком од 5 спратова; лифт се креће од приземља до 5. спрата (не враћа се).)

Време за рад 180 минута.
Сваки задатак вреди 20 поена.