

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Четврти разред – Б категорија

1. Двочлана партиција скупа $P = \{1, 2, \dots, n\}$ је пар $\{A, B\}$ непразних подскупова од P таквих да је $P = A \cup B$ и $A \cap B = \emptyset$ (партиције $\{A, B\}$ и $\{B, A\}$ се сматрају једнаким). Доказати да је број двочланих партиција скупа P једнак $2^{n-1} - 1$.
2. У троуглу ABC важе релације $AB = AC < BC$. Нека је D тачка на полуправој AB таква да је $AD = BC$. Одредити вредност угла $\sphericalangle ABC$ ако се зна да је $\sphericalangle BCA = 4 \cdot \sphericalangle DCB$.
3. Нека су a и b природни бројеви такви да је $a \cdot b = 10^{20}$ и зна се да a дели b^2 , b^2 дели a^3 , a^3 дели b^4 , b^4 дели a^5 итд., $a^{2n-1} \mid b^{2n}$ и $b^{2n} \mid a^{2n+1}$ за све $n \in \mathbb{N}$. Доказати да је $a = b$.
4. Дат је полином $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ са целобројним коефицијентима. Ако је $a \cdot d$ непаран а $b \cdot c$ паран број, показати да је бар једна нула полинома $P(x)$ ирационална. Показати примером да аналогно тврђење не важи ако је $a \cdot d$ паран а $b \cdot c$ непаран број?
5. Одредити максималну вредност коју може имати површина нормалне пројекције правилног тетраедра ивице a на произвољну раван.

Време за рад 240 минута.

Решења задатака детаљно образложити.