

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Четврти разред – А категорија

1. Код једнакокраког троугла ABC је $AB = BC$ и $\angle ABC = 30^\circ$. Тачка D припада страници BC троугла тако да је $AC : BD = \sqrt{2}$. Израчунати угао $\angle DAC$.
2. Ако су X , Y и Z тачке на страницама BC , CA и AB троугла ABC , такве да је $\triangle XYZ \sim \triangle ABC$ ($\sphericalangle X = \sphericalangle A$, $\sphericalangle Y = \sphericalangle B$), доказати да се ортоцентар троугла XYZ и центар описаног круга троугла ABC поклапају.
3. Доказати да постоји полином облика $x^n + 2007x^{n-1} + \dots$ који дели полином $x^m - 1$ за неко $m \in \mathbb{N}$.
4. Нека је $n \in \mathbb{N}$ дати непаран природан број већи од 1. Доказати да се сваки природан број $l \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq n$ може представити као збир или разлика два природна броја који су мањи од n и узајамно прости са n .
5. Колико највише ловаца може да се стави на шаховску таблу димензија $m \times n$ тако да ни један од њих не туче више од два друга ловца.

Напомена: Ловац туче фигуру која је на истој дијагонали и која није заклоњена неком другом фигуром.

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.