

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Други разред – Б категорија

1. Раван је разложена на јединичне квадрате тако да формира бесконачну шаховску таблу. Уписати у сваки квадрат по један од бројева 1, 2, 3, 4, 5 тако да у сваких пет хоризонтално, вертикално или дијагонално суседних квадрата буду уписани сви ови бројеви?
2. Нека је  $CD$  висина правоуглог троугла  $ABC$  (угао код темена  $C$  је  $90^\circ$ ). Ако је  $K$  тачка равни тог троугла таква да је  $AK = AC$ , доказати да је пречник кружнице описане око троугла  $ABK$  који садржи тачку  $A$  нормалан на  $DK$ .
3. Нека је  $f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$  квадратна функција, где су  $\alpha$  и  $\beta$  неки (не обавезно различити) природни бројеви. Колико реалних и различитих нула има једначина

$$f(f(f(x))) = 0 ?$$

4. За сваки природан број обележимо са  $x_n$  број који се добија узастопним записивањем природних бројева од 1 до  $n$  (нпр.  $x_{15} = 123456789101112131415$ ). Одредити све природне бројеве  $n$  за које 27 дели  $x_n^2 + x_n - 2$ .
5. Одредити све реалне бројеве  $x > 1$  за које је тачна неједнакост

$$\log_2(\log_4 x) + \log_4(\log_2 x) \leq 2.$$

Време за рад 240 минута.  
Решења задатака детаљно образложити.