

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Трећи разред – Б категорија

1. Двочлана партиција скупа $P = \{1, 2, \dots, n\}$ је пар $\{A, B\}$ непразних подскупова од P таквих да је $P = A \cup B$ и $A \cap B = \emptyset$ (партиције $\{A, B\}$ и $\{B, A\}$ се сматрају једнаким). Доказати да је број двочланих партиција скупа P једнак $2^{n-1} - 1$.
2. Права p која је паралелна страници AB датог троугла ABC и полови страницу BC сече симетралу s угла ABC у тачки T . Ако је O центар уписаног круга датог троугла, доказати да је

$$\sphericalangle OCT = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC.$$

3. Доказати да једначина $x + \cos x = 1$ има тачно једно решење у скупу реалних бројева.
4. Наћи бар једну неконстантну функцију $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ која задовољава услов:

$$f(x+2) + f(x) = f(x+1) \text{ за свако } x \in \mathbb{R}.$$

5. α, β, γ су оштри углови које дијагонала квадрата $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ гради редом са ивицама AA_1, AB и AD . Доказати неједнакост

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.