

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Трећи разред – А категорија

1. У троуглу ABC у коме је $AB \neq AC$, уписани круг са центром S додирује странице BC, CA и AB редом у тачкама D, E и F . Права EF сече праву BC у P . Доказати да је права PS нормална на праву AD .
2. У троуглу ABC је $AB = AC < BC$. Нека је D тачка на полуправој AB , тако да је $AD = BC$. Ако је $\sphericalangle BCA = 4 \cdot \sphericalangle DCB$ одредити могуће вредности за $\sphericalangle ABC$.
3. Нека су a и n природни бројеви, $a > 1$, такви да n дели $a^n - 1$. Доказати да тада $(a - 1)n$ дели $a^n - 1$.
4. У групи људи сваки човек има тачно три познаника. Доказати да је могуће сместити све људе из те групе у две просторије тако да сваки човек има највише једног познаника у просторији у којој се налази.
5. Одредити минималну вредност израза $\frac{x^4+y^4+z^4}{x+y+z}$ уз ограничења $\min\{x(y^2+z^2), y(z^2+x^2), z(x^2+y^2)\} \geq 1+xyz, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

Време за рад 240 минута.

Решења задатака детаљно образложити.