

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ДРЖАВНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.03.2007.

Други разред – А категорија

1. Круг уписан у троугао ABC додирује странице BC, CA, AB редом у тачкама D, E, F . Права AD сече уписани круг троугла ABC још у тачки Q . Доказати да права EQ пролази кроз средиште дужи AF ако и само ако је $AC = BC$.

2. Нека је S скуп комплексних бројева дефинисан са:

$$S = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \left| z + \frac{1}{z} \right| = 1 \right\}.$$

- (a) Наћи највећу могућу вредност модула $|z|$, ако је $z \in S$;
(b) Наћи најмању могућу вредност модула $|z|$, ако је $z \in S$.

3. Решити једначину $x^5 = y^5 + 3y^4 + 8y^2 + 5y + 1$ у целим бројевима.

4. Нека је $P(x)$ полином са целобројним коефицијентима. Ако за неке различите целе бројеве a и b важи $P(a) \cdot P(b) = -(a - b)^2$, доказати да је $P(a) + P(b) = 0$.

5. Могу ли се поља квадрата 5×5 прекрити правоугаонцима 2×3 тако да свако поље квадрата буде прекривено исти број пута?

Време за рад 240 минута.
Решења задатака детаљно образложити.