

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Први разред – Б категорија

1. Наћи остатак при дељењу броја $3^{1000} + 4^{1000}$ са 13.
2. Бисектриса унутрашњег угла $\sphericalangle ACB$ троугла ABC уједно је и бисектриса угла који образује пречник CD описаног круга и висина конструисана из темена C . Доказати!
3. За елемент пермутације кажемо да је десно минималан ако је мањи од свих елемената који се налазе десно од њега. На пример у пермутацији $(2, 1, 4, 6, 3, 7, 8, 5)$ десно минимални елементи су на другој и петој позицији (елементи 1 и 3). Колико има различитих пермутација елемената скупа $\{1, 2, \dots, 8\}$ које имају десно минималне елементе на другој и петој позицији (и можда још на неким другим позицијама)?

4. Уз претпоставку $0 < b \leq a$ доказати неједнакост

$$\frac{1}{8} \frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8} \frac{(a-b)^2}{b}.$$

Под којим условима нека од неједнакости прелази у једнакост.

5. Познато је да је површина троугла $P = \frac{15}{4}$ као и да важе једнакости $a + c = 8$ и $\beta = 30^\circ$. Наћи странице a, b, c овог троугла.

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.