Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Четврти разред – Б категорија

1. Уписани круг у троугао ABC додирује стране BC, AC, AB троугла у тачкама A', B', C'. На описаном кругу троугла ABC означимо са A'' средиште лука BC који не садржи тачку A, са B'' средиште лука AC који не садржи тачку B, са C'' средиште лука AB који не садржи тачку C. Доказати да се праве $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ секу у једној тачки.

2. а) Ако су $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ функције дефинисане са $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$, тада ако за сваки реални број x важи $\alpha \arcsin \frac{2x}{1+x^2} + \beta \operatorname{arctg} x = 0$, онда је $\alpha = \beta = 0$. Доказати.
б) Да ли важи претходно тврђење ако су $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ и $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ функције дефинисане са $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ и $g(x) = \operatorname{arctg} x$?

3. Решити неједначину

$$\frac{\log_{21+4x-x^2}(7-x)}{\log_{x+3}(21+4x-x^2)} < \frac{1}{4}.$$

4. Доказати да у сваком тетраедру постоји теме такво да се од ивица које из њега полазе може конструисати троугао.

5. Одредити чланове a_1, a_2, a_3, a_4 аритметичког и b_1, b_2, b_3, b_4 геометријског низа ако је

$$a_1 + b_1 = 23 \quad a_2 + b_2 = 21 \quad a_3 + b_3 = 22 \quad a_4 + b_4 = 29.$$

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.