

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Четврти разред – А категорија

1. На страни BC троугла ABC уочимо тачку D и уочимо уписане кругове у троуглове ABD и ACD . Заједничка спољашња тангента ова два круга, различита од праве BC , сече дуж AD у тачки K . Доказати да дужина дужи AK не зависи од положаја тачке D .
2. За дати природан број n , у скупу позитивних реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ x_1^1 + x_2^2 + \dots + x_n^n &= n.\end{aligned}$$

3. Нека су m, n и k природни бројеви. Познато је да се правоугаона таблица димензија $m \times n$ може поплатити (без преклапања) правоугаоницима $1 \times k$. Доказати да је бар један од бројева m и n дељив са k .
4. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\begin{aligned}x + y &= 1 \\ (x^4 + y^2)(x^2 + y^4) &= 85.\end{aligned}$$

5. Наћи сва реална решења једначине $(2 + \sqrt{3})^x + 1 = \left(2 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^x$.

Време за рад 180 минута.
Решења задатака детаљно образложити.