

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

24.02.2007.

Први разред – А категорија

1. Наћи остатак при дељењу броја $3^{1000} + 4^{1000}$ са 13.
2. Дата су два круга који се додирују изнутра у тачки A . Ако се из друге крајње тачке B пречника AB спољашњег круга конструише права која додирује унутрашњи круг у тачки C и сече спољашњи круг у тачки D , доказати да је права AC бисектриса угла BAD .
3. За елемент пермутације кажемо да је десно минималан ако је мањи од свих елемената који се налазе десно од њега. На пример у пермутацији $(2, 1, 4, 6, 3, 7, 8, 5)$ десно минимални елементи су на другој и петој позицији (елементи 1 и 3). Колико има различитих пермутација елемената скупа $\{1, 2, \dots, 8\}$ које имају десно минималне елементе на другој и петој позицији (и можда још на неким другим позицијама)?
4. Уз претпоставку $0 < b \leq a$ доказати неједнакост

$$\frac{1}{8} \frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \leq \frac{1}{8} \frac{(a-b)^2}{b}.$$

Под којим условима нека од неједнакости прелази у једнакост.

5. У зависности од природног броја n наћи највећи заједнички делилац бројева $n^2 + 1$ и $(n+1)^2 + 1$.

Време за рад 180 минута.

Решења задатака детаљно образложити.