

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Четврти разред – А категорија

1. Колико постоји правоуглих троуглова чија су темена тачке целобројне решетке  $3 \times n$  (где је  $n \geq 5$ )?
2. Дат је оштроугли троугао  $ABC$ . Нека је  $I$  центар уписаног круга,  $O$  центар описаног круга и  $H$  ортоцентар троугла  $\triangle ABC$ . Права  $AI$  сече страницу  $BC$  у  $A'$ , а права  $BI$  сече страницу  $AC$  у  $B'$ . Права  $OH$  сече страницу  $AC$  у  $P$ , а  $BC$  у  $Q$ . Ако је четвороугао  $CA'IB'$  конвексан и тетиван, доказати да је  $PQ = AP + BQ$ .
3. Доказати да за сваки природан број  $n$  постоји природан број  $x$  такав да је  $2^x - x$  дељиво са  $n$ .
4. Ако су  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 48$ ) нуле полинома  $P(x) = 18x^{48} + 3x + 2006$ , израчунати  $\sum_{i=1}^{48} \frac{x_i}{1 + x_i}$ .
5. Одредити све функције  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  такве да је  $f(f(x) + y + 1) = x + f(y) + 1$  за свака два цела броја  $x$  и  $y$ .

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.