

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Трећи разред – А категорија

1. Одредити све вредности природног броја n , за који постоји његов делилац k , тако да $nd + 1$ дели $n^2 + d^2$.

2. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}} + \frac{1}{4\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}} < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}}$.

3. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такве да је

$$f(x) = \max_{y \in \mathbb{R}} (2xy - f(y)),$$

за свако $x \in \mathbb{R}$.

4. Доказати да не постоји више од $2 \cdot 5^3$ кошаркашких тимова од по 5 играча формираних од 25 ученика, тако да број заједничких играча за свака два тима није већи од 2.

5. Нека је $ABCDEF$ конвексан шестоугао код кога је $AB = BC$, $CD = DE$ и $EF = FA$. Доказати неједнакост

$$\frac{AB}{BE} + \frac{CD}{DA} + \frac{EF}{FC} \geq \frac{3}{2}.$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.