

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.03.2006.

Први разред – А категорија

1. Ако су  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  непразни подскупови равни  $\alpha$ , такви да је  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \emptyset$  и  $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = \alpha$ , доказати да постоји једнаокраки правоугли троугао чија су сва три темена у једном од скупова  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$ .
2. У  $\mathbb{Z}^3$  решити  $3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 2x + 2y + 2z = 2004$ .
3. Петоугао  $ABCDE$  уписан је у круг полупречника  $r$ . Ако је  $AB = BC = DE = r$ , доказати да је троугао  $BGF$  једнакостраничан, при чему су  $G$  и  $F$  средишта страница  $CD$  и  $EA$  петоугла.
4. Од свих троуглова једнаког обима највећу површину има једнакостраничан троугао. Доказати.
5. За неки природан број  $n$ ,  $n > 3$ , у запису броја  $\frac{n(n+1)}{2}$  учествују све исте цифре. Која цифра то може бити?

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.