Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.02.2006.

Четврти разред – Б категорија

1. Ако су x, y реални бројеви такви да је $1 \leqslant x \leqslant y$ онда из једнакости

$$x^y + y^x = x^x + y^y \quad \text{следи} \quad x = y.$$

Доказати.

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x^z = y^{\frac{8}{3}}, \quad y^z = x^{\frac{2}{3}}, \quad z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}.$$

3. K_0 је кружница са центром у $C_0 = (0, 1/2)$ и полупречником $1/2$, K_1 кружница са центром у $C_1 = (1, 1/2)$ и полупречником $1/2$, K_2 (најмања) кружница која додирује кружнице K_0, K_1 и x-осу и K_3 кружница која на исти начин додирује кружнице K_0, K_2 и x-осу. Доказати да је за $n = 1, 2, 3$ полупречник кружнице K_n једнак $r_n = \frac{1}{2n^2}$ и да ова кружница додирује x-осу у тачки $x_n = \frac{1}{n}$.

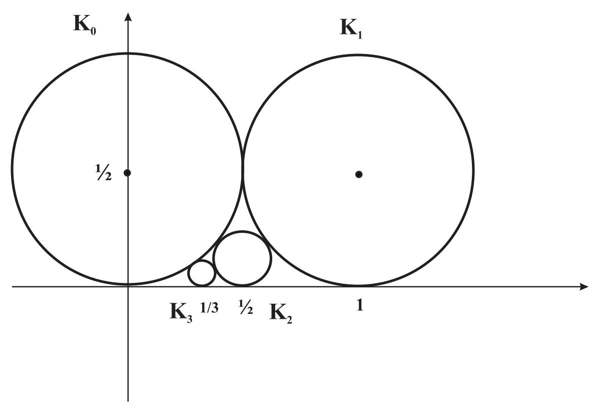

Figure 1:

4. Нека су α, β, γ углови троугла. Одредити угао α ако је

$$\frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} = 1\,.$$

5. (а) Како се мења запремина тетраедра $ABCD$ ако се повећава ивица AB а све остале ивице тетраедра остају неизмењене.
(б) Дужина ивице AB тетраедра $ABCD$ је већа или једнака 1, док су остале ивице дужине мање или једнаке 1. Доказати да је

$$V_{ABCD} \leqslant \frac{1}{8}\,.$$