

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.02.2006.

Четврти разред – А категорија

1. Доказати неједнакост

$$\cos^3 x \sin x \leq \frac{3\sqrt{3}}{16}.$$

Када важи једнакост?

2. Дато је n различитих тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ у равни. Нека је $\mathcal{S}$ скуп свих средишта дужи $\overline{A_i A_j}$, $1 \leq i < j \leq n$.

а) Доказати да скуп тачака $\mathcal{S}$ има бар $2n - 3$ елемента.

б) Наћи један распоред тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ за који скуп $\mathcal{S}$ има тачно $2n - 3$ елемента.

3. Четвороугао $ABCD$ је основа пирамиде $SABCD$, а ивица SD је њена висина. Израчунати запремину пирамиде, ако је $AB = BC = \sqrt{5}$, $AD = DC = \sqrt{2}$, $AC = 2$ и $SA + SB = 2 + \sqrt{5}$.

4. Нека је $f(x) = x^3 - 3x + 1$. Наћи број различитих реалних корена једначине $f(f(x)) = 0$.

5. На колико различитих начина се могу расподелити 7 различитих куглица у 4 кутије које се не разликују?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.