

18.02.2006.

Трећи разред – Б категорија

1. Доказати да за све  $a, b > 0$  важи неједнакост

$$2(a^4 + b^4) + 17 > 16ab.$$

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$x^z = y^{\frac{8}{3}}, \quad y^z = x^{\frac{2}{3}}, \quad z = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{9y}.$$

3. Нека су  $\alpha, \beta, \gamma$  углови троугла. Одредити угао  $\alpha$  ако је

$$\frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} = 1.$$

4. (а) Како се мења запремина тетраедра  $ABCD$  ако се повећава ивица  $AB$  а све остале ивице тетраедра остају неизмењене.  
(б) Дужина ивице  $AB$  тетраедра  $ABCD$  је већа или једнака 1, док су остале ивице дужине мање или једнаке 1. Доказати да је

$$V_{ABCD} \leq \frac{1}{8}.$$

5. За два различита (неподударна) троугла кажемо да су пријатељски ако имају две једнаке странице. Скуп пријатељских троуглова називамо добрим ако сви троуглови из тог скупа имају исти пар једнаких страница. Одредити минималну вредност за  $N, N > 2$ , за коју је сваки скуп од  $N$  међусобно пријатељских троуглова добар скуп.

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.