

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

18.02.2006.

Трећи разред – А категорија

1. Дат је полином са реалним коефицијентима $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 1$ који има три реална позитивна корена, не обавезно различита. Одредити минималну вредност збира $a + b$.

2. Решити систем једначина:

$$\begin{aligned}2 \log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}(x^2 - 2x + 1) &= 6 \\ \log_{1-x}(y + 5) - \log_{2+y}(x + 4) &= 1.\end{aligned}$$

3. Наћи све целе бројеве a, b, c, d за које важи $ab + cd = 5$ и $ac - bd = 4$.

4. Дато је n различитих тачака A_1, A_2, \dots, A_n у равни. Нека је \mathcal{S} скуп свих средишта дужи $\overline{A_i A_j}$, $1 \leq i < j \leq n$.

а) Доказати да скуп тачака \mathcal{S} има бар $2n - 3$ елемента.

б) Наћи један распоред тачака A_1, A_2, \dots, A_n за који скуп \mathcal{S} има тачно $2n - 3$ елемента.

5. (а) Како се мења запремина тетраедра $ABCD$ ако се повећава ивица AB а све остале ивице тетраедра остају неизмењене.

(б) Дужина ивице AB тетраедра $ABCD$ је већа или једнака 1, док су остале ивице дужине мање или једнаке 1. Доказати да је

$$V_{ABCD} \leq \frac{1}{8}.$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.