

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Четврти разред – А категорија

1. Нека су $a, b \in \mathbb{Z}$ и за свако $n \in \mathbb{N}$ број $a \cdot 2^n + b$ је потпун квадрат. Доказати да је $a = 0$.
2. У круг k је уписан шестоугао $ABCDEF$, при чему су странице AB , CD и EF једнаке полупречнику круга k . Доказати да средишта преостале три странице представљају врхове једнакостраничног троугла.
3. Ако су $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ сви делиоци природног броја $n > 1$, доказати да је

$$d_1 + d_2 + \dots + d_k > k\sqrt{n}.$$

4. Низ $\{a_i\}$ задат је рекурентно:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = \frac{a_{n+1}^2 + 2}{a_n}, \quad \text{за } n \geq 1.$$

Доказати да су сви чланови тог низа цели бројеви.

5. Дат је јединични круг и у њему 800 тачака, од којих ниједна није центар круга. Познато је да се међу датим тачкама не налазе 3 колинеарне. Доказати да мала Ангелина може наћи кружни исечак од 45° који садржи тачно 100 тачака. Мала Ангелина не сме да сече круг по правима које садрже неку од датих тачака.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.