

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Трећи разред – Б категорија

1. Решити једначину

$$\sqrt{x^x} = x\sqrt{x}$$

у скупу позитивних реалних бројева.

2. Нека је функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, дата са

$$f(x) = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5},$$

за свако $x \in \mathbb{R}$. Одредити максималну вредност (ако постоји) дате функције.

3. У четвороуглу $ABCD$ је $\sphericalangle DAB = 150^\circ$, $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ABD = 120^\circ$ и $\sphericalangle DBC - \sphericalangle ABD = 60^\circ$. Наћи $\sphericalangle BDC$.
4. Ако важи $x \sin^2 \alpha + y \cos^2 \alpha = 1$, $x \cos^2 \varphi + y \sin^2 \varphi = 1$, $x \operatorname{tg} \alpha = y \operatorname{tg} \varphi$, $x \neq y$ доказати да важи $x + y = 2xy$.
5. Доказати да за све природне бројеве $n \geq 3$ важи

$$\log_{n-1} 10 + \log_{n+1} 10 > 2 \log_n 10.$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.