

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Трећи разред – А категорија

1. Нека  $S(n)$  означава збир цифара природног броја  $n$ . Наћи све бројеве  $n$  такве да је  $S(n) = S(2n) = \dots = S(n^2)$ .
2. Нека су  $E$  и  $F$  тачке на страницама  $AC$  и  $AB$  троугла  $\triangle ABC$  такве да је  $EF \parallel BC$ . Доказати да пресечне тачке кругова над пречницима  $BE$  и  $CF$  припадају висини из темена  $A$ .
3. У четвороуглу  $ABCD$  је  $\sphericalangle DAB = 150^\circ$ ,  $\sphericalangle DAC + \sphericalangle ABD = 120^\circ$  и  $\sphericalangle DBC - \sphericalangle ABD = 60^\circ$ . Наћи  $\sphericalangle BDC$ .
4. Нека за позитивне реалне бројеве  $x$  и  $y$  важи

$$x^2 + y^3 \geq x^3 + y^4.$$

Доказати да је

$$x^3 + y^3 \leq 2.$$

5. Доказати да се за свако  $n \in \mathbb{N}$ , међу свим природним бројевима који садрже у свом декадном запису само цифре 1, 9 и 2 (и при том се свака од њих бар једном појављује у том запису) може наћи бар један који је дељив са  $2^n$ .

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.