

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.03.2005.

Први разред – А категорија

1. Колико има једнакокраких трапеза са целобројним страницама чији је обим 2004?
(Трапез је четвороугао који има тачно две паралелне странице!)
2. Нека је $\triangle ABC$ једнакокраки троугао са $AB = AC$. Дата је тачка D на страници AC , таква да је $CD = 2AD$ и тачка P на дужи BD . Ако је $\sphericalangle APC = 90^\circ$, доказати да је $\sphericalangle ABP = \sphericalangle PCB$.
3. Нека су A_1, A_2, \dots, A_{501} произвољне, међусобно различите тачке у равни. Доказати да на било којој кружници полупречника 4 постоји тачка M за коју је испуњено да је збир дужина дужи $MA_1, MA_2, \dots, MA_{501}$ већи или једнак 2004.
4. За реалне бројеве a и b доказати следећу неједнакост:

$$a(1 + b^2) + b(1 + a^2) \leq (1 + a^2)(1 + b^2).$$

5. На табли је написано 2005 јединица. Дозвољено нам је да избришемо два од записаних бројева и уместо њих напишемо четвртину њихове суме. Овај поступак понављамо док на табли не остане само један број. Доказати да последњи преостали број није мањи од $1/2005$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.