

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2005.

Трећи разред – А категорија

1. У троуглу $\triangle ABC$, тачка D је средиште странице BC , а тачка E на страници AB таква да је $AE = 2EB$. Ако је $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDE$, наћи угао $\sphericalangle ACB$.
2. Нека је дат природан број a . Доказати да постоји бесконачно много парова природних бројева (b, c) таквих да су

$$ab + 1, \quad ac + 1 \quad \text{и} \quad bc + 1$$

потпуни квадрати.

3. Нека су a, b, c странице произвољног троугла и α, β углови насупрам страница a и b . Доказати да важи

$$a \cos \alpha + b \cos \beta \leq c.$$

4. Нека су x_1, \dots, x_n позитивни реални бројеви такви да је

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1.$$

Наћи минималну вредност израза

$$-\frac{x_1^2}{2} + \sum_{i=1}^n x_i^2 - \sum_{i=1}^{n-1} x_i x_{i+1}.$$

5. Дате су три тачке у равни. Наћи круг најмањег полупречника, који садржи ове тачке.
(Под кругом се подразумева кружница и њена унутрашњост)

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.