

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

19.02.2005.

Први разред – А категорија

1. Права кроз центар описаног круга и ортоцентар троугла $\triangle ABC$ (Ојлерова права), сече унутрашњост страница CA и CB у тачкама M и N , редом, таквим да је $CM = CN$. Доказати да је $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.
2. Наћи све тачке P на кругу описаном око троугла $\triangle ABC$ за које је збир $PA + PB + PC$ минималан.
3. Нека су x и y цели бројеви, такви да 90 дели $x^2 + xy + y^2$. Доказати да онда 900 дели xy .
4. Нека су x , y и z реални бројеви, такви да је

$$x^2 + y^2 + z^2 = 18 \quad \text{и} \quad xy + yz + zx = 9.$$

Израчунати вредност израза $|x| + |y| + |z|$.

5. Ана и Бранко су ставили неки број жетона на поља шаховске табле 8×8 . Ана је записала бројеве жетона у свакој врсти, а Бранко бројеве жетона у свакој колони. Ана је записала све различите бројеве. Да ли је могуће да су сви Бранкови бројеви различити од Аниних?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.