

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ
27.03.2004.

Четврти разред – Б категорија

1. Наћи све просте бројеве p и q такве да једначина $x^4 - px^3 + q = 0$ има цео корен.
2. Наћи све природне бројеве n такве да функција $f(x) = \cos nx \cdot \sin \frac{5}{n}x$ има период 3π .
3. Нека је $n \in \mathbb{N}$. Решити систем једначина:
$$\begin{aligned}x_1(x_1 + x_2 + \dots + x_n) &= 1 \\x_2(x_1 + x_2 + \dots + x_n) &= 3 \\x_3(x_1 + x_2 + \dots + x_n) &= 5 \\&\vdots \\x_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n) &= 2n - 1 .\end{aligned}$$
4. Наћи све реалне вредности параметра a такве да функција
$$f(x) = \frac{1}{3} 2^{3x} + a \cdot 2^{2x-1} + (1-a)2^x$$
буде растућа за све вредности $x \in \mathbb{R}$.
5. Доказати да за све природне бројеве n важи
$$\log(n+1) > \frac{\log 1 + \log 2 + \dots + \log n}{n} .$$

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.