

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

27.03.2004.

Четврти разред – А категорија

1. Дат је конвексан петоугао $ABCDE$ код кога је $DC = DE$ и $\sphericalangle DCB = \sphericalangle DEA = 90^\circ$. Нека је F унутрашња тачка сегмента AB одређена условом $AF : BF = AE : BC$. Доказати да је $\sphericalangle FCE = \sphericalangle ADE$ и $\sphericalangle FEC = \sphericalangle BDC$.
2. Дат је оштроугли троугао ABC . Нека су M , N и P средишта страница AB , AC и BC , A_0 подножје нормале из тачке N на страницу BC , и нека је A_1 средиште дужи MA_0 . Конструиримо аналогно B_1 и C_1 . Доказати да се праве AA_1 , BB_1 и CC_1 секу ако и само ако је троугао ABC једнакокрак.
3. Означимо са $d(n)$ број делилаца природног броја n . Одредити све природне бројеве n такве да међу бројевима $n, d(n), d(d(n)), d(d(d(n))), \dots$ нема ниједног потпуног квадрата.
4. Наћи све 1-1 функције $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ које задовољавају услове:
 $1^\circ f(f(m) + f(n)) = f(f(m)) + f(n), \quad 2^\circ f(1) = 2, \quad f(2) = 4.$
5. Нека је A скуп од 6 елемената. Доказати да у свакој фамилији $\{A_1, A_2, \dots, A_{11}\}$ различитих троелементних подскупова од A , постоје три различита скупа A_i , A_j и A_k који су сви подскупови истог четвороелементног скупа.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.