

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

27.03.2004.

Трећи разред – А категорија

1. Дат је круг k и његов пречник AB . Нека је P произвољна тачка тог круга различита од A и B . Пројекција тачке P на AB је Q . Круг са центром P и полупречником PQ сече круг k у C и D . Пресек правих CD и PQ је тачка E . Нека је F средиште AQ , а G подножје нормале из F на CD . Доказати да је $EP = EQ = EG$ и да су тачке A , G и P колинеарне.
2. У скупу реалних бројева наћи сва решења система једначина
$$x = 1 + \sqrt{y}, \quad y = 1 + \sqrt{z}, \quad z = 1 + \sqrt{x}.$$
3. Ако је $n \in \mathbb{N}$ такав да
$$n \mid (1^n + 2^n + \dots + (n-1)^n) + 1,$$
доказати да n није дељив ниједним квадратом већим од 1.
4. Функција $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ је таква да је
$$x + f(x) = f(f(x))$$
за свако $x \in \mathbb{R}$. Наћи сва решења једначине $f(f(x)) = 0$.
5. Дејан је пре x година имао x пута мање година него онда кад је y година раније имао y пута мање године него што има сада, причему су x , y и број Дејанових година природни бројеви. Колико све година може да има Дејан?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.