

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Трећи разред – А категорија

1. У правоугаонику $ABCD$ је $AB = 1$, $BC = 2$. Дата је тачка P унутар њега таква да је $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PBA = 15^\circ$. Израчунати $\sphericalangle CPD$.

2. Ако су m , n и p одсечци које троугао $\triangle ABC$ одређује на правима које садрже средиште уписаног круга а паралелне су, респективно, са страницама $BC = a$, $CA = b$ и $AB = c$, доказати да је

$$\frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c} = 2.$$

3. Нека су $a_1, a_2, \dots, a_{2004}$, $b_1, b_2, \dots, b_{2004}$ међусобно различити реални бројеви. Ако је за свако $i \in \{1, 2, \dots, 2004\}$

$$(a_i + b_1)(a_i + b_2) \dots (a_i + b_{2004}) = \alpha,$$

доказати да, за свако $i \in \{1, 2, \dots, 2004\}$ важи

$$(b_i + a_1)(b_i + a_2) \dots (b_i + a_{2004}) = -\alpha.$$

4. Наћи све просте бројеве p и q , такве да је број $\sqrt{p^2 + 14pq + q^2} + \sqrt{p^2 + 7pq + q^2}$ природан.

5. Наћи све функције $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ које за све $x, y \in \mathbb{N}$ задовољавају

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}, \quad \text{кад је } \frac{x+y}{3} \in \mathbb{N}.$$

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.