

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28.02.2004.

Други разред – А категорија

1. Нека су m и n природни бројеви не мањи од 2. Доказати да постоји природан број k тако да важи
$$\left(\frac{n + \sqrt{n^2 - 4}}{2}\right)^m = \frac{k + \sqrt{k^2 - 4}}{2}.$$
2. Дат је троугао $\triangle ABC$. Тангента t у тачки B на описану кружницу око тог троугла сече праву AC у тачки M . Наћи $\frac{AM}{MC}$, ако је $\frac{AB}{BC} = k$.
3. Ако је $(x + \sqrt{x^2 + 1}) \cdot (y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$, доказати да је $x + y = 0$.
4. Ако су тежишне линије $\triangle ABC$ из темена B и C међусобно нормалне онда је: $\operatorname{ctg} \beta + \operatorname{ctg} \gamma \geq \frac{2}{3}$. Доказати. У ком случају важи једнакост?
5. Дата је бела табла 2002×2003 и доста црвене и беле боје.
 - а) Дозвољено је у једном кораку променити боју ма која четири поља која чине квадрат 2×2 . Да ли се после неколико корака може добити исти број белих и црвених поља?
 - б) Дозвољено је у једном кораку променити боју ма којих девет поља која чине квадрат 3×3 . Да ли се после неколико корака може добити исти број белих и црвених поља?

Време за рад 180 минута.
Задатке детаљно образложити.