

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Четврти разред – А категорија

1. Наћи скуп свих могућих позитивних реалних бројева V таквих да постоји правоугли паралелепипед са следећим особинама: његова запремина је V , површина 18, а сума растојања од центра до страна је 6.
2. Нека је $p > 2$ прост број. Доказати да је сваки делилац броја $2^p - 1$ облика $2kp + 1$ за неко природно k .
3. Нека је O центар описане кружнице, а T тежиште троугла ABC , који није једнакостраничан. Доказати да је OT нормална на тежишну дуж CC_1 ако и само ако за стране троугла важи $BC^2 + CA^2 = 2AB^2$.
4. Нека је $n \geq 3$, а a_1, a_2, \dots, a_n реални бројеви такви да је $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$. Доказати да важи

$$a_1 a_2 a_3 + a_2 a_3 a_4 + \dots + a_{n-2} a_{n-1} a_n \leq \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{3} \right)^3.$$

Када важи једнакост?

5. На кружници је дато n тачака. Никоје три дужи које се добијају спајањем ових тачака се не секу у једној тачки унутар круга. На колико области ове дужи деле круг?

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.