

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Други разред – Б категорија

1. У скупу реалних бројева решити једначину

$$(x-1)\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}} + (3-x)\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} = 2.$$

2. Нека је  $S$  подскуп скупа реалних бројева који је затворен у односу на множење (то значи кад год су  $a, b \in S$ , онда је и  $a \cdot b \in S$ ). Нека су  $T$  и  $U$  дисјунктни подскупови скупа  $S$ , чија је унија цео скуп  $S$ . Познато је да производ ма која три елемента скупа  $T$  (не обавезно различита) припада скупу  $T$  и да производ ма која три елемента из  $U$  припада скупу  $U$ . Доказати да је бар један од подскупова  $T$  и  $U$  затворен у односу на множење.
3. Дата је квадратна једначина  $ax^2 + bx + c = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ . Ако су оба решења једначине реална и припадају интервалу  $(0, 1)$ , доказати да је  $a(2c + b) < 0$ .
4. У кружни одсечак коме одговара централни угао од  $120^\circ$  уписан је квадрат. Одредити дужину странице квадрата, ако је полупречник круга  $2 + \sqrt{19}$ .
5. Доказати да је број  $\left( \sqrt[6]{8\sqrt{5} + 16} + \sqrt{\sqrt{5} + 1} \right) \cdot \sqrt{\sqrt{5} - 1}$  цео и израчунати га.

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.