

Министарство просвете и спорта Републике Србије
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Трећи разред – Б категорија

1. Израчунати дужину полупречника лопте уписане у тространу пирамиду $SABC$, ако су ивице SA, SB и SC међусобно нормалне и $AB = BC = a, BS = b$.

2. Решити систем у зависности од реалног параметра a :

$$\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ x + 6ay + z &= 6 \\ x + by + az &= 1. \end{aligned}$$

3. Нека су a, b, c, d странице, а P површина конвексног четвороугла. Доказати да важи $P \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}$. Када важи једнакост?

4. Нека је E средиште странице AB квадрата $ABCD$, а F и G тачке на страницама BC и CD , редом, такве да је $EF \parallel AG$. Доказати да је FG тангента на круг уписан у квадрат $ABCD$.

5. Ако за оштре углове α, β и γ важи $\cos \alpha = \operatorname{tg} \beta, \cos \beta = \operatorname{tg} \gamma$ и $\cos \gamma = \operatorname{tg} \alpha$, доказати да је $\sin \alpha = \sin \beta = \sin \gamma = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

Време за рад 240 минута.
Задатке детаљно образложити.