

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Други разред – А категорија

1. Доказати да квадратне једначине  $ax^2 + bx + c = 0$  и  $bx^2 + cx + a = 0$ ,  $a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b \neq 0$ , имају заједничко решење ако и само ако важи  $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ .
2. Нека је  $S$  подскуп скупа реалних бројева који је затворен у односу на множење (то значи кад год су  $a, b \in S$ , онда је и  $a \cdot b \in S$ ). Нека су  $T$  и  $U$  дисјунктни подскупови скупа  $S$ , чија је унија цео скуп  $S$ . Познато је да производ ма која три елемента скупа  $T$  (не обавезно различита) припада скупу  $T$  и да производ ма која три елемента из  $U$  припада скупу  $U$ . Доказати да је бар један од подскупова  $T$  и  $U$  затворен у односу на множење.
3. Нека су  $a, b, c$  реални бројеви, такви да је  $0 < a \leq b \leq c$ . Доказати да важи
$$(a + 3b)(b + 4c)(c + 2a) \geq 60abc.$$
Када важи једнакост?
4. Да ли је могуће једнакостранични троугао странице 3 разрезати на 2003 дисјунктна троугла, тако да сваки од њих има све странице веће од 1?
5. Круг  $k$  у тачкама  $P$  и  $Q$  додирује краке угла  $\sphericalangle POQ$ . На полуправој  $Oq$  је дата тачка  $X$ , тако да пресечна тачка  $Z$  круга  $k$  и праве  $PX$  различита од  $P$  полови дуж  $PX$ . Ако је  $Y$  пресечна тачка круга  $k$  и праве  $OZ$  различита од  $Z$ , доказати да је  $PX \parallel QY$ .

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.