

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

29.03.2003.

Први разред – А категорија

1. Нека су  $x$  и  $y$  ненегативни реални бројеви такви да је  $x + y = 2$ .

Доказати да важи

$$x^2y^2(x^2 + y^2) \leq 2.$$

Када важи једнакост?

2. Дат је број  $2^k$ ,  $k > 3$ . Доказати да се пермутацијама цифара овог броја не може добити број  $2^n$ , где је  $n > k$ .

3. Свако од 20 људи шаље некој десеторици од осталих по једно писмо. Доказати да постоје две особе које су једна другој послале писмо.

4. Кружница која је уписана у троугао  $ABC$  додирује странице  $AB$  и  $AC$  редом у тачкама  $M$  и  $N$ . Нека је  $P$  тачка пресека симетрале угла  $\sphericalangle ABC$  и праве  $MN$ . Доказати да је површина троугла  $ABC$  два пута већа од површине троугла  $ABP$ .

5. На страницама  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  троугла  $ABC$  уочене су тачке  $A_1, B_1$  и  $C_1$ , редом. Нека је  $T$  тежиште троугла  $ABC$ , а  $T_1$  тежиште троугла  $A_1B_1C_1$ . Доказати да је  $T \equiv T_1$  ако и само ако је

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A.$$

Време за рад 240 минута.  
Задатке детаљно образложити.