

Министарство просвете и спорта Републике Србије  
Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

01.03.2003.

Трећи разред – А категорија

1. Дата је једначина  $x^3 - px + q = 0$ ,  $q \neq 0$ , која има три реална решења.

а) Доказати да је  $p > 0$ .

б) Ако је и  $q > 0$ , доказати да за најмањи по апсолутној вредности корен ове једначине,  $\alpha$ , важи  $|\alpha| \leq \min \left( \sqrt{\frac{p}{3}}, \sqrt[3]{\frac{q}{2}} \right)$ .

2. У скупу реалних бројева решити систем једначина

$$\sqrt{1+x_1} + \sqrt{1+x_2} + \dots + \sqrt{1+x_{100}} = 100\sqrt{1+\frac{1}{100}}$$

$$\sqrt{1-x_1} + \sqrt{1-x_2} + \dots + \sqrt{1-x_{100}} = 100\sqrt{1-\frac{1}{100}}.$$

3. Доказати да се у координатној равни не може нацртати конвексни четвороугао, коме је једна дијагонала два пута дужа од друге, угао између дијагонала му је  $45^\circ$ , а координате свих темева су цели бројеви.

4. Дата је тачка  $P$  унутар неког неког круга. Кроз тачку  $P$  постављамо две међусобно нормалне тетиве. У ком положају је збир дужина тих тетива најмањи, а у ком највећи и колике су те екстремне вредности, ако је полупречник кружнице  $R$ , а растојање тачке  $P$  од центра те кружнице  $d$  ( $0 < d < R$ )?

5. Нека је  $a = \sqrt[2003]{2003}$ . Шта је веће  $a^{a^{\dots a}}$  } 2003 пута или 2003?

Време за рад 180 минута.  
Задатке детаљно образложити.