Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Први разред – Б категорија

1. Одредити све просте бројеве p за које су и бројеви p^3+6, p^3-6 прости.

2. Дат је троугао ABC и тачке M, N, P на његовим страницама AB, BC, AC редом, такве да је четвороугао $AMNP$ паралелограм. Посматрајмо кругове описане око троуглова MBN и NCP. Нека су t_1 и t_2 њихове тангенте у тачкама M и P редом. Доказати да је $t_1 \parallel t_2$.

3. Дати су позитивни бројеви a, b, c. Ако је $a^2+b^2+c^2=\dfrac{5}{3}$, доказати да је

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c}<\frac{1}{abc}\,.$$

4. Дат је троугао ABC. Посматрајмо праве које секу странице AC и BC у тачкама M и N редом тако да је $MN=AM+BN$. Доказати да постоји круг k који додирује све такве праве.

5. Дат је скуп $\mathcal{A}=\{1,2,3,\ldots,2002\}$. Колико има подскупова $\mathcal{B}$ скупа $\mathcal{A}$ са следећим својством: ако $x\in\mathcal{B}$ и $y\in\mathcal{B}$, онда $x+y\neq 2003$?

Време за рад 240 минута.