

Друштво математичара Србије  
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Четврти разред – Б категорија

1. Шта је веће:

$$\frac{2}{201} \quad \text{или} \quad \ln \frac{101}{100} ?$$

Образложити одговор.

2. Дати су бројеви  $z \in \mathbb{C}$ ,  $z \neq 1$  и  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ . Ако је  $z^n = 1$ , доказати да важи

$$1 + 2z + 3z^2 + \dots + nz^{n-1} = \frac{n}{z-1}.$$

3. Дат је триедар са врхом  $O$ , и тачке  $A, B, C$  на његовим ивицама које су једнако удаљене од тачке  $O$ . Нека је  $S$  центар лопте уписане у тај триедар. Доказати да је вектор  $\overrightarrow{OS}$  колинеаран са вектором

$$\sin \angle BOC \cdot \overrightarrow{OA} + \sin \angle COA \cdot \overrightarrow{OB} + \sin \angle AOB \cdot \overrightarrow{OC}.$$

4. Одредити сва реална решења система

$$\frac{2x_1^2}{1+x_1^2} = x_2, \quad \frac{2x_2^2}{1+x_2^2} = x_3, \quad \dots, \quad \frac{2x_n^2}{1+x_n^2} = x_1.$$

5. Доказати да се у координатној равни може нацртати кружница која не пролази ни кроз једну тачку са целобројним координатама, а у чијој се унутрашњости налазе тачно 2002 такве тачке.

Време за рад 240 минута.