Друштво математичара Србије

РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Четврти разред – А категорија

1. Нека су f и g не-нула полиноми истог степена са целобројним коефицијентима. Ако је $f(n)$ дељиво са $g(n)$ за свако $n \in \mathbb{N}$, доказати да постоји $c \in \mathbb{Z}$ такво да је $f(x) = cg(x)$ за свако $x \in \mathbb{R}$.

2. Доказати да је број

$$\left[\frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]+1$$

дељив са 7. ($[x]$ је највећи цео број који није већи од x.)

3. Дат је триедар са врхом O, и тачке A, B, C на његовим ивицама које су једнако удаљене од тачке O. Нека је S центар лопте уписане у тај триедар. Доказати да је вектор $\overrightarrow{OS}$ колинеаран са вектором

$$\sin\sphericalangle BOC \cdot \overrightarrow{OA} + \sin\sphericalangle COA \cdot \overrightarrow{OB} + \sin\sphericalangle AOB \cdot \overrightarrow{OC}.$$

4. У кутији се налазе једна плава и 99 црвених куглица. Из кутије се случајно бирају куглице једна за другом и остављају ван кутије све док се не изабере куглица (означимо је са A) која се по боји разликује од претходно изабране куглице. Куглица A се враћа у кутију и експеримент почиње из почетка. Процес се наставља све док се не узму све куглице. Избори куглица су међусобно независни. Колика је вероватноћа да је последња изабрана куглица плава?

5. Доказати да се у координатној равни може нацртати кружница која не пролази ни кроз једну тачку са целобројним координатама, а у чијој се унутрашњости налазе тачно 2002 такве тачке.

Време за рад 240 минута.