

Друштво математичара Србије  
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Други разред – Б категорија

1. Наћи све вредности реалног параметра  $a$  тако да систем

$$\begin{aligned}axy + x - y + \frac{3}{2} &= 0 \\x + 2y + xy + 1 &= 0\end{aligned}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

2. Дат је траpez  $ABCD$ ,  $AB \parallel CD$ . Нека је  $\{S\} = AC \cap BD$ , и  $p$  права која садржи тачку  $S$  и паралелна је основицама трапеза. Ако су  $M$  и  $N$  пресечне тачке праве  $p$  са крацима трапеза, доказати да је  $S$  средиште дужи  $MN$ .
3. Дати су позитивни реални бројеви  $a$  и  $b$ ,  $a + b = 1$ . Ако су  $a^3$  и  $b^3$  рационални, доказати да су и бројеви  $a, b$  такође рационални.
4. Нека је  $a_1, a_2, \dots, a_{99}$  низ цифара за које важи: ако је  $a_n = 1$ , онда  $a_{n+1} \neq 2$ , и ако  $a_n = 3$ , онда  $a_{n+1} \neq 4$ . Доказати да постоје  $k, l \in \{1, 2, \dots, 98\}$ ,  $k \neq l$ , такви да је  $a_k = a_l$  и  $a_{k+1} = a_{l+1}$ .
5. Дат је троугао  $ABC$ . Нека су  $A_1, B_1$  средишта страница  $BC, AC$  редом и  $T$  његово тежиште. Ако се у четвороугао  $B_1TA_1C$  може уписати круг, доказати да је троугао  $ABC$  једнакокрак.

Време за рад 240 минута.