

Друштво математичара Србије
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Трећи разред – Б категорија

1. Нека су α и β оштри углови неког троугла. Ако је

$$\sin(\alpha + \beta) - 1 = \sin^2 \alpha - \cos^2 \beta,$$

доказати да је трећи угао тог троугла прав.

2. У троуглу ABC , странице AC и BC су подударне и $\sphericalangle BCA = 100^\circ$. Унутар тог троугла уочена је тачка M таква да је $\sphericalangle MAB = 30^\circ$ и $\sphericalangle MBA = 20^\circ$. Одредити $\sphericalangle ACM$.
3. Дат је тетраедар $SABC$ код кога је троугао ABC оштроугли и $SA = SB = SC$. Доказати да се тај тетраедар може исећи на коначно много полиедара од којих се може сложити тетраедар подударан са $SABC$, али супротне оријентације.
4. Доказати да постоји природан број n коме су последње четири цифре једнаке 2002, такав да n^{2002} почиње цифрама 2002.
5. Дати су природни бројеви a, b, c . Доказати да је вредност

$$\frac{1}{2abc} \begin{vmatrix} (b+c)^2 & b^2 & c^2 \\ a^2 & (a+c)^2 & c^2 \\ a^2 & b^2 & (a+b)^2 \end{vmatrix}$$

куб неког природног броја.

Време за рад 240 минута.