

Друштво математичара Србије  
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Други разред – А категорија

1. Наћи све вредности реалног параметра  $a$  тако да систем

$$\begin{aligned}axy + x - y + \frac{3}{2} &= 0 \\x + 2y + xy + 1 &= 0\end{aligned}$$

има јединствено решење у скупу реалних бројева.

2. Дат је конвексан петоугао  $ABCDE$ . Ако је  $AB = 5$ ,  $BC = 6$ ,  $CD = 10$ ,  $DE = 7$  и  $AE = 9$ , доказати да се у тај петоугао не може уписати круг.

3. У скупу целих бројева решити систем

$$\begin{aligned}x + y + z &= 3 \\x^3 + y^3 + z^3 &= 3.\end{aligned}$$

4. Нека је  $a_1, a_2, \dots, a_{99}$  низ цифара за које важи: ако је  $a_n = 1$ , онда  $a_{n+1} \neq 2$ , и ако  $a_n = 3$ , онда  $a_{n+1} \neq 4$ . Доказати да постоје  $k, l \in \{1, 2, \dots, 98\}$ ,  $k \neq l$ , такви да је  $a_k = a_l$  и  $a_{k+1} = a_{l+1}$ .

5. Дат је троугао  $ABC$ . На правим  $AC$ ,  $AB$ ,  $BC$  дате су тачке  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$  редом тако да важе распореди  $C - A - A_1$ ,  $A - B - B_1$ ,  $B - C - C_1$ . Ако је

$$AA_1 : BB_1 : CC_1 = \frac{AB}{BC} : \frac{BC}{AC} : \frac{AC}{AB},$$

доказати да су троуглови  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  слични.

Време за рад 240 минута.