

Друштво математичара Србије
РЕПУБЛИЧКО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

30.03.2002.

Први разред – А категорија

1. Дат је полином $p(x)$ са целобројним коефицијентима. При дељењу полиномом $x^2 - 12x + 11$, $p(x)$ даје остатак $990x - 889$. Доказати да $p(x)$ нема ниједну нулу у скупу целих бројева.

2. Дат је троугао ABC и тачке M, N, P на његовим страницама AB, BC, AC редом, такве да је четвороугао $AMNP$ паралелограм. Посматрајмо кругове описане око троуглова MBN и NCP . Нека су t_1 и t_2 њихове тангенте у тачкама M и P редом. Доказати да је $t_1 \parallel t_2$.

3. Дати су реални бројеви a, b, c, d за које важи

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2, \quad ab + cd > 0, \quad ac + bd > 0.$$

Доказати да је $ad + bc > 0$.

4. Дат је троугао ABC . Посматрајмо праве које секу странице AC и BC у тачкама M и N редом тако да је $MN = AM + BN$. Доказати да постоји круг k који додирује све такве праве.

5. Нека је $S(n)$ збир, а $P(n)$ производ цифара природног броја n . Наћи све природне бројеве за које је $S(n) + P(n) = n$.

Време за рад 240 минута.