Друштво математичара Србије

ОКРУЖНО ТАКМИЧЕЊЕ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

02.03.2002.

Четврти разред – А категорија

1. У оштроуглом неједнакокраком троуглу ABC уочена је тачка T из које се свака страница тог троугла види под углом од $120°$ (*Торичелијева тачка троугла*). Нека су A_1, B_1 и C_1 подножја нормала из тачке T на странице троугла, и k кружница описана око $\triangle A_1B_1C_1$. Ако су A_2, B_2 и C_2 пресечне тачке кружнице k са страницама троугла ABC различите од тачака A_1, B_1, C_1, доказати да је $\triangle A_2B_2C_2$ једнакостраничан.

2. Наћи све функције $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ које задовољавају једнакост

$$2f(2x) = f(x) + x \quad \text{за свако } x \in \mathbb{R}$$

и непрекидне су у тачки $x = 0$.

3. Одредити све природне бројеве $n > 1$ који имају следеће својство: за сваке две пермутације $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ скупа $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ постоје различити бројеви $i, j \in A$ такви да $n \mid (a_i + b_i) - (a_j + b_j)$.

4. Човек се налази у чамцу на левој обали канала широког $3\,km$. Жели да стигне до куће на десној обали канала која је од њега удаљена $5\,km$ ваздушном линијом. Он ће довеслати до неког места на другој обали брзином од $6\,km/h$, а затим наставити до куће трчећи брзином од $8\,km/h$. Одредити растојање куће и места до ког треба човек да довесла да би стигао кући за најкраће могуће време. (Претпоставља се да вода у каналу мирује.)

5. Нека је P полином са целобројним коефицијентима и $n \geqslant 3$ природан број. Доказати да не постоје различити цели бројеви $x_1, x_2, \ldots, x_n$ тако да важи

$$P(x_1) = x_2, \quad P(x_2) = x_3, \quad \ldots, \quad P(x_{n-1}) = x_n, \quad P(x_n) = x_1.$$

Време за рад 180 минута.